Colles de Maths - semaine 14 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Familles sommables

Exercice 1 On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer la quantité

$$\sum_{q=2}^{\infty} (-1)^q \left(\zeta(q) - 1\right).$$

Exercice 2 On rappelle l'existence de la constante d'Euler $\gamma > 0$, telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$. On note, pour $q > 1$, $\zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Justifier l'existence de et calculer, en fonction de γ, la quantité

$$\sum_{q=2}^{\infty} (-1)^q \, \frac{\zeta(q) - 1}{q}.$$

Exercice 3 Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g(n/d).$$

On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s}$ sont absolument convergentes. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ est absolument convergente et donner une expression de sa somme.

Probabilités

Exercice 4 Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une constante C et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}.$$

En considérant les événements $\{\{p \text{ divise } X\},\, p \text{ premier}\}$, montrer que

$$\zeta(\alpha) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Exercice 5 En utilisant des variables de Poisson, déterminer un équivalent de

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor an \rfloor} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a > 1$;
2. $\displaystyle\sum_{k=\lfloor an \rfloor}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a < 1$.

Exercice 6 Soit une famille $(X_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ une famille de variables de Bernoulli de paramètre p_n mutuellement indépendantes. On considère le graphe aléatoire de sommets $[\![1, n]\!]$, et d'arêtes $\{\{i, j\}, i < j \text{ et } X_{i,j} = 1\}$. Soit X_n le nombre de points isolés dans le graphe.
Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ lorsque $n\,p_n - \ln n \to +\infty$.